LANGKAH-LANGKAH PENENTUAN SUATU BARISAN SEBAGAI SUATU GRAFIK DENGAN DASAR TEOREMA HAVEL-HAKIMI

Erly Listiyana[1], Susilo Hariyanto[2] dan Lucia Ratnasari[3]
[1, 2, 3]Jurusan Matematika FMIPA UNDIP
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H., Tembalang, Semarang.

Abstract. Consider a non increasing sequence of non negative integres d = (d_1, d_2, …, d_n) . A sequence d is called a graphic if it is sequnce of degrees on a simple graph with n order. In this paper will be discussed necessary and sufficient conditions of a sequence d be a graphic. And then will be constructed an algorithm to determine a sequence be a graphic, particularly a sequnce with n large order.

Keywords : sequnce of degrees, graphic.

1. PENDAHULUAN

Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) dengan
V = himpunan tidak kosong dari titik (*vertex*) dan
E = himpunan garis (*edge*) yang menghubungkan sepasang titik
atau dapat ditulis dengan notasi $G = (V,E)$.

Representasi visual dari graf adalah dengan menyatakan objek sebagai titik dan hubungan antara objek dinyatakan dengan garis. Sebagai contoh, sebuah jaringan komunikasi dapat dimodelkan ke dalam bentuk graf, dengan titik menyatakan pusat komunikasi dan garis menyatakan jaringan komunikasi.

Apabila diberikan suatu graf sederhana G maka barisan derajat dari graf G pasti dapat ditentukan. Namun tidak berlaku sebaliknya yakni jika diberikan suatu barisan bilangan bulat tak negatif yang tidak naik $d=(d_1, d_2, \ldots, d_n)$, maka belumlah tentu terdapat suatu graf sederhana G dengan barisan derajat d. Agar barisan d merupakan grafik diantaranya harus dipenuhi $d_i \leq n\text{-}1$ untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, n$ dan $\sum_{i=1}^{n} d_i$ genap. Namun kondisi ini ternyata belum cukup menjamin bahwa d adalah grafik. Oleh karena itu perlu diteliti syarat perlu dan cukup agar barisan d merupakan grafik.

2. DASAR TEORI

2.1. Jenis-jenis graf

Graf dapat dikelompokkan menjadi beberapa jenis. Pengelompokan graf dapat dipandang berdasarkan ada tidaknya garis ganda atau *loop*, berdasarkan jumlah titik dan berdasarkan orientasi arah pada garis.

Berdasarkan ada tidaknya garis ganda atau *loop*, maka graf digolongkan menjadi 2 jenis yakni sederhana dan tak sederhana.Graf Sederhana (*Simple Graph*) adalah graf yang tidak mengandung garis ganda maupun *loop*. Sedangkan graf tak sederhana (*Unsimple Graph*) adalah graf yang mengandung garis ganda maupun *loop*.

Berdasarkan jumlah titik pada suatu graf, maka secara umum graf dapat digolongkan menjadi graf berhingga dan tak berhingga.Graf berhingga dalah graf yang jumlah titiknya berhingga dan sebaliknya disebut graf tak berhingga.

Berdasarkan orientasi arah pada garis graf dapat dibedakan menjadi 2 jenis, yaitu graf tak berarah yang garisnya tidak mempunyai orientasi arah. Dan graf berarah yang garisnya mempunyai orientasi arah.

2.2. Operasi *Switching*

Definisi 2.1 [5]

Operasi switching $\sigma(a, b, c, d) = \sigma$ *pada graf G adalah operasi penggantian garis*

$ab, cd \in E(G)$ dengan garis $ac, bd \notin E(G)$ dan $G^{\sigma(a,b,c,d)}=(G-\{ab, cd\})+\{ac, bd\})$

Lemma 2.2 [3]

Misalkan G adalah graf berorder n dan barisan derajatnya adalah $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ sedemikian sehingga $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n$, dengan $d_G(v_i) = d_i$ untuk $i = 1,2,3,\ldots, n$ maka terdapat graf G' yang diperoleh dari G dengan suatu barisan dari beberapa switching sedemikian sehingga neighbourhood dari v_1 pada graf G' adalah $N_{G'}(v_1) = \{v_2, v_3,\ldots, v_{d_1+1}\}$.

Bukti:

Misalkan $\Delta(G) = d_1$. Misalkan terdapat titik v_i dengan $2 \leq i \leq d_1 + 1$ sedemikian sehingga $v_1v_i \notin E(G)$. Karena $d_G(v_1) = d_1$, maka terdapat v_j dengan $j \geq d_1 + 2$ sedemikian sehingga $v_1v_j \in E(G)$. Disini $d_i \geq d_j$, karena $j > i$. Oleh karena $v_1v_j \in E(G)$, maka terdapat v_t dengan $2 \leq t \leq n$ sedemikian sehingga $v_iv_t \in E(G)$, tetapi $v_jv_t \notin E(G)$. Sehingga dapat dilakukan *switching* terhadap titik-titik v_1, v_j, v_i, v_t. Sehingga dapat diperoleh graf baru yaitu graf H, dengan $v_1v_i \in E(H)$ dan $v_1v_j \notin E(H)$ dan titik-titik lain yang *adjacent* dengan v_1 tetap *adjacent* dengan v_1. Ketika proses ini diulang untuk setiap indek i dengan $v_1v_i \notin E(G)$ untuk $2 \leq i \leq d_1 + 1$ maka akan diperoleh graf G' dan terbukti bahwa v_1 *adjacent* dengan $v_2, v_3,\ldots, v_{d_1+1}$. □

Teorema 2.3[3]

Dua graf G dan H atas himpunan titik V memenuhi sifat $d_G(v)= d_H(v)$ untuk semua v anggota V jika dan hanya jika H dapat diperoleh dari G dengan barisan dari beberapa switching.

Bukti:

($\Leftarrow$)

Operasi *switching* merupakan operasi yang mempertahankan derajat. Sehingga jika graf H dapat diperoleh dari graf G dengan *switching*, maka titik-titik pada H memiliki derajat-derajat yang sama dengan G.

($\Rightarrow$)

Misalkan graf G dan H memiliki derajat-derajat yang sama. Misalkan juga $d_1 = \Delta(G)$. Dengan lemma 2.2.2, terdapat barisan-barisan dari beberapa *switching* yang mentransformasikan G ke G' dan H ke H' sedemikian sehingga $N_{G'}(v_1) = \{v_2, v_3,\ldots, v_{d_1+1}\} = N_{H'}(v_1)$. Sekarang graf $G'- v_1$ dan $H'- v_1$ memiliki derajat-derajat yang sama. Dengan induksi hipotesis, G' dan juga G , dapat ditransformasikan ke H' dengan suatu barisan dari beberapa *switching*. Akhirnya dapat diamati bahwa H' dapat ditransformasi ke H dengan membalik barisan dari beberapa *switching* yang mentransformasikan H ke H'. □

3. PEMBAHASAN

Suatu barisan bilangan bulat tak negatif $d_1, d_2, \ldots, d_n$ dikatakan barisan derajat dari suatu graf G jika d_i merupakan derajat dari titik v_i untuk setiap i = 1, 2, ..., n. Jumlah dari $d_1, d_2, \ldots, d_n$ sama dengan $2e$, dimana e menyatakan jumlah garis pada graf G.

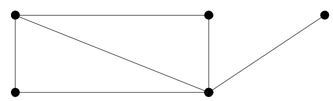
Apabila diberikan suatu graf G, maka barisan derajat dari graf G dapat ditentukan. Namun jika diberikan suatu barisan bilangan bulat tak negatif $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ maka harus diselidiki terlebih dahulu apakah ada graf G dengan barisan derajatnya adalah $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$. Oleh karena itu pada tulisan ini akan dibahas syarat perlu dan cukup agar suatu barisan dikatakan grafik. Sebagai langkah awal membahas syarat perlu dan cukup agar suatu barisan merupakan grafik terlebih dahulu diberikan definisi berikut.

Definisi 3.1[1]

Misalkan $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ merupakan barisan bilangan bulat tak negatif yang tidak naik. Barisan tersebut dikatakan grafik, jika terdapat suatu graf sederhana $G = (V, E)$ dengan $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ dan $d_i = d_G(v_i)$ untuk setiap $i= 1, 2,\ldots, n$. Dalam hal ini G dikatakan realisasi dari d.

Barisan grafik kadang-kadang disebut sebagai *graphical* atau *realizable*.

Contoh 3.1:



Gambar 3.1 Graf *H*

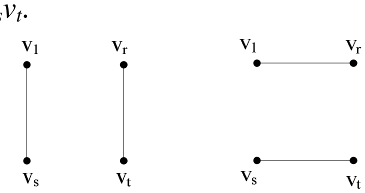
Barisan derajat dari graf *H* pada Gambar 3.1 adalah 4,3,2,2,1 atau 1,2,2,3,4 atau 2,1,4,2,3 dan lain sebagainya. Pada Gambar 3.1 barisan derajatnya pasti memenuhi kondisi: $d_i \leq n-1$ untuk setiap $i = 1,2, ..., n$ dan $\sum_{i=1}^{n} d_i$ genap, karena syarat perlu agar *d* merupakan grafik adalah harus dipenuhi $d_i \leq n-1$ untuk setiap $i=1, 2, ..., n$ dan $\sum_{i=1}^{n} d_i$ genap. Namun kondisi ini belum cukup menjamin bahwa barisan $d = (d_1, d_2,..., d_n)$ adalah grafik. Sebagai contoh barisan 4,4,3,2,1 bukan grafik. Meskipun kondisi (1) dan (2) terpenuhi, namun barisan ini tidak mungkin dapat digambarkan menjadi suatu graf sederhana. Syarat perlu dan cukup agar suatu barisan dikatakan grafik dapat diperoleh dari teorema berikut.

Teorema 3.2 [3]
Barisan bilangan bulat tak negatif $d = (d_1, d_2, ...,d_n)$ dengan $d_1 \geq d_2 \geq ... \geq d_n$, $d_1 \geq 1$ dan $n \geq 2$ adalah grafik jika dan hanya jika $d' = (d_2-1,\ d_3-1,\ ...,\ d_{d_1+1}-1,\ d_{d_1+2},\ d_{d_1+3}, d_n)$ adalah grafik.

Bukti:
$(\Leftarrow)$
Misalkan *d'* adalah grafik, maka terdapat graf sederhana *G'* dengan $V(G') = \{v_2, v_3, ..., v_n\}$ sedemikian sehingga

$$d_{G'}(v_i) = \begin{cases} d_i - 1, \ jika\ 2 \leq i \leq d_1 + 1 \\ d_i \quad ,\ jika\ d_1 + 2 \leq i \leq n \end{cases}$$

Sebuah graf baru yaitu graf *G* dapat digambarkan dengan menambahkan sebuah titik baru yaitu v_1 ke *G'* dan menghubungkan v_1 ke $v_2, v_3, ..., v_{d_1+1}$. Tampak bahwa *G* adalah graf sederhana dan mempunyai barisan derajat $d = (d_1, d_2, ...,d_n)$, sehingga *d* adalah grafik.
$(\Rightarrow)$
Misalkan *d* adalah barisan grafik. Maka terdapat graf *G* dengan barisan derajat *d*, dan $V(G) = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ sedemikian hingga $d(v_i) = d_i$ untuk $1 \leq i \leq n$. Hal ini mempunyai dua kemungkinan.
Kemungkinan 1 :
Jika v_1 *adjacent* dengan $v_2, v_3,..., v_{d_1+1}$ maka graf G-v_1 mempunyai barisan derajat *d'* sehingga merupakan grafik.
Kemungkinan 2:
Jika v_1 tidak *adjacent* dengan semua titik $v_2, v_3, ..., v_{d_1+1}$ maka terdapat titik v_r dan v_s dengan $d_r > d_s$ sedemikian sehingga v_1 *adjacent* dengan v_s tetapi tidak dengan v_r. Jika $d_r = d_s$ maka titik v_r dan v_s dapat diubah tanpa mempengaruhi derajat-derajatnya. Misalkan $d_r > d_s$, oleh karena derajat dari v_r lebih besar dari v_s dan terdapat titik v_t sedemikian sehingga v_t *adjacent* dengan v_r tetapi tidak dengan v_s. Misalkan Graf *G'* adalah graf yang diperoleh dari *G* dengan menghapus garis v_1v_s dan v_rv_t dan menambahkan garis v_1v_r dan v_sv_t.



Graf *G* Graf *G'*

Gambar 3.2. Graf *G* dan graf *G'*

Hasilnya graf *G'* mempunyai barisan derajat *d*. Akan tetapi di *G'*, jumlah derajat-derajat dari titik-titik yang *adjacent* dengan v_1 lebih besar dari pada di *G*. Akibatnya, jika dilanjutkan prosedur ini akan diakhiri saat sebuah graf dengan barisan derajat *d* dimana v_1 memenuhi hipotesis dari kemungkinan pertama. Jadi *d* adalah grafik. □

Teorema 3.2 di atas dikenal dengan nama Teorema Havel-Hakimi. Teorema tersebut dilakukan berulang-ulang untuk mengetahui suatu barisan adalah grafik atau bukan. Apabila saat proses pengujian diperoleh suatu barisan yang setiap angkanya adalah nol maka proses berhenti. Sehingga dapat disimpulkan bahwa barisan yang diberikan semula adalah grafik. Apabila saat dilakukan proses pengujian terdapat barisan yang memuat angka bilangan bulat negatif maka barisan yang diberikan semula bukan grafik.

Contoh 3.2
Apakah barisan d = (3, 3, 2, 2, 2, 2) merupakan grafik?
Penyelesaian:
d = (3, 3, 2, 2, 2, 2)
d' = (2, 1, 1, 2, 2) = (2, 2, 2, 1, 1)
d'' = (1, 1, 1, 1)
d''' = (0, 1, 1) = (1, 1, 0)
d'''' = (0, 0)
Sehingga menurut Teorema Havel-Hakimi barisan d = (3, 3, 2, 2, 2, 2) merupakan grafik.

Apabila suatu barisan $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ dengan n yang cukup besar, maka perhitungan secara manual dengan menggunakan Teorema 3.2 untuk mengetahui suatu barisan adalah grafik atau bukan cukup rumit. Oleh karena itu disusun langkah-langkah atau algoritma berdasarkan Teorema Havel-Hakimi di atas, sebagai berikut:

Langkah-langkah penentuan suatu barisan grafik

Diberikan suatu barisan bilangan bulat tak negatif $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ dengan panjang (*length*) n, lakukan langkah-langkah berikut ini untuk menentukan bahwa barisan yang diberikan merupakan grafik.

Langkah 1

Tulis $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ dengan urutan menurun (*descending order*).

Langkah 2

2.1. Jika barisan memiliki tepat satu jenis angka, maka berhenti. Sehingga $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ adalah grafik jika dan hanya jika angka tersebut adalah 0.

2.2. Apabila pada barisan tersebut memuat angka bernilai negatif maka berhenti, dan dapat disimpulkan bahwa barisan yang diberikan bukan grafik.

Langkah 3

Hilangkan angka terbesar dari barisan tersebut (misal angka terbesanya adalah d_1), sedemikian sehingga barisan yang baru memiliki panjang (*length*) $n-1$.

Langkah 4

4.1. Jika barisan yang baru, banyaknya angka lebih kecil dari d_1, maka berhenti. Sehingga $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ bukan grafik.

4.2. Jika pada barisan yang baru, banyaknya angka lebih besar sama dengan d_1, maka lanjutkan pada langkah 5.

Langkah 5

Masing-masing d_1 elemen pertama dikurangi 1, dan barisan yang baru disebut sebagai $d' = (d_2-1, d_3-1, \ldots, d_{d_1+1}-1, d_{d_1+2}, d_{d_1+3}, \ldots, d_n)$. Ulangi algoritma ini dari langkah 1 untuk menguji d'.

Teorema Havel-Hakimi mengatakan bahwa barisan $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ adalah grafik jika dan hanya jika $d' = (d_2-1, d_3-1, \ldots, d_{d_1+1}-1, d_{d_1+2}, d_{d_1+3}, \ldots, d_n)$ grafik. Sehingga apabila pada saat pengujian barisan pada algoritma tersebut ditemukan barisan yang bukan grafik, maka berhenti dan dapat disimpulkan bahwa d bukan grafik.

4. PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Kesimpulan yang dapat diambil adalah:

1. Suatu barisan d agar dapat dikatakan grafik adalah barisan tersebut harus merupakan barisan bilangan bulat tak negatif yang tidak naik, derajat

maksimalnya harus lebih kecil dari panjang barisan.

2. Syarat perlu dan cukup agar *d* dikatakan grafik dapat diuji dengan menggunakan Teorema Havel-Hakimi.

4.2 Saran

Artikel ini dapat digunakan sebagai dasar pada penyusunan program komputasi agar penentuan barisan merupakan grafik dapat dilakukan secara cepat dan akurat, terutama untuk nilai *n* yang cukup besar.

5. DAFTAR PUSTAKA

[1] Blitzstein, J. and Diaconis, P. (2006), *A Sequential Importance Sampling Algorithm For Generating Random Graphs With Prescribed Degrees.*

[2] Chartrand, G. dan Lesniak, L. (1996), *Graphs & Digraphs*, New York, Chapman & Hall / crc.

[3] Harju, Tero (2007), *Lecture Notes On Graph Theory*, Finland, Department of Mathematics University of Turku.

[4] Naskar, S, Sarma, S. S, Dey, K. N. and Basuli, K. (2008), *On Degree Sequence*, ACM Ubiquity Vol.9, Issue 16, India, Department of Computer Science and Engineering University of Calcutta.

[5] Punnim, Narong (2005), *Switching, Realization, And Interpolation Theorems For Graph Parameters*, International Journal of Mathematics And Mathematical Science, Vol.13 : 2095 – 2117